

IOANA MONALISA MANEA  
CRISTINA NEAGOE

---

**Culegere de probleme  
de matematică  
pentru clasa a 8-a**

---

EDITURA PUIȘOR  
București

2024

<b>1. Recapitulare. Teste de evaluare inițială</b>	<b>6</b>
<b>2. Intervale de numere reale. Inecuații în <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>9</b>
2.1. Mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor lor	9
2.2. Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor	11
2.3. Intersecția și reuniunea intervalelor	12
2.4. Inecuații de forma $ax+b \geq 0$ ( $\leq, <, >$ ), unde $a, b \in \mathbb{R}$	14
Teste de evaluare	16
<b>3. Calcul algebric în <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>18</b>
3.1. Adunarea și scăderea numerelor reale reprezentate prin litere; reducerea termenilor asemenea	18
3.2. Înmulțirea, împărțirea și ridicarea la putere a numerelor reale reprezentate prin litere	19
3.3. Formule de calcul prescurtat	21
3.4. Aplicații	26
3.5. Descompuneri în factori utilizând reguli de calcul în $\mathbb{R}$	29
Teste de evaluare	33
3.6. Frații algebrice: amplificarea și simplificarea	35
3.7. Operații cu fracții algebrice	37
Teste de evaluare	40
3.8. Ecuații de forma $ax^2 + bx + c = 0$ , unde $a, b, c \in \mathbb{R}$	41
Teste de evaluare	43
<b>4. Funcții</b>	<b>45</b>
4.1. Funcții definite pe mulțimi finite, exprimate cu ajutorul unor diagrame, tabele, formule; graficul unei funcții, reprezentarea geometrică a graficului unor funcții numerice	45
4.2. Funcții de forma $f: D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ , unde $a, b \in \mathbb{R}$ și $D$ este o mulțime finită de numere reale sau un interval nedegenerat; interpretare geometrică; lecturi grafice	47
4.3. Elemente de statistică: indicatorii tendinței centrale (frecvență, medie, mediană, mod și amplitudine ale unui set de date)	52
Teste de evaluare	54
<b>5. Elemente ale geometriei în spațiu</b>	<b>56</b>
5.1. Puncte, drepte, plane: convenții de notare, reprezentări, determinarea dreptei, determinarea planului, relații între puncte, drepte, plane	56
5.2. Corpuri geometrice: piramida, piramida regulată, tetraedrul regulat	57
5.3. Corpuri geometrice: prisma dreaptă, paralelipipedul dreptunghic, cubul	58
5.4. Corpuri geometrice: cilindrul circular drept, conul circular drept	60
Teste de evaluare	61
5.5. Poziții relative a două drepte în spațiu, drepte paralele	62
5.6. Unghiul a două drepte în spațiu	63
5.7. Poziții relative ale unei drepte față de un plan, dreaptă paralelă cu un plan	64
5.8. Poziții relative a două plane, plane paralele	65

5.9.	Secțiuni paralele cu baza în corpurile geometrice studiate, trunchiul de piramidă și trunchiul de con circular drept . . . . .	67
5.10.	Drepte perpendiculare, dreapta perpendiculară pe un plan; aplicații: înălțimea unei piramide, înălțimea unui con circular drept . . . . .	68
5.11.	Distanța dintre două plane paralele, înălțimea prisme drepte, a paralelipipedului dreptunghic, a cilindrului circular drept, a trunchiului de piramidă, a trunchiului de con circular drept . . . . .	70
	Teste de evaluare . . . . .	71
5.12.	Plane perpendiculare, aplicații: secțiuni diagonale, secțiuni axiale în corpurile studiate . . . . .	72
5.13.	Proiecții de puncte, de segmente și de drepte pe un plan . . . . .	73
5.14.	Unghiul dintre o dreaptă și un plan, lungimea proiecției unui segment . . . . .	74
5.15.	Teorema celor trei perpendiculare; calculul distanțelor de la un punct la o dreaptă, de la un punct la un plan, între două plane paralele . . . . .	76
5.16.	Unghi diedru, unghi plan corespunzător diedrului; unghiul dintre două plane . . . . .	78
5.17.	Plane perpendiculare . . . . .	80
	Teste de evaluare . . . . .	81
<b>6.</b>	<b>Arii și volume ale unor corpuri geometrice</b>	<b>83</b>
6.1.	Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul corpurilor geometrice studiate, determinare prin calcul . . . . .	83
6.2.	Paralelipipedul dreptunghic . . . . .	83
6.3.	Cubul . . . . .	85
6.4.	Prisma patrulateră regulată . . . . .	87
6.5.	Prisma triunghiulară regulată și prisma hexagonală regulată . . . . .	88
	Teste de evaluare . . . . .	90
6.6.	Piramida patrulateră regulată . . . . .	92
6.7.	Piramida triunghiulară regulată, tetraedrul și piramida hexagonală regulată . . . . .	94
6.8.	Trunchiul de piramidă patrulateră regulată . . . . .	96
6.9.	Trunchiul de piramidă triunghiulară regulată și trunchiul de piramidă hexagonală regulată . . . . .	98
	Teste de evaluare . . . . .	101
6.10.	Cilindrul circular drept . . . . .	102
6.11.	Conul circular drept . . . . .	104
6.12.	Trunchiul de con circular drept . . . . .	106
6.13.	Sfera . . . . .	108
	Teste de evaluare . . . . .	109
<b>7.</b>	<b>Modele de teste pentru Evaluarea Națională</b>	<b>111</b>
<b>8.</b>	<b>Soluții</b>	<b>125</b>

# 1. Recapitulare. Teste de evaluare inițială

## Testul 1

- I. 1. Rezultatul calculului  $-0,2 \cdot 5 + (-1)^2$  este: a) 2; b) 0; c) 1; d) 3.
2. Numărul elementelor din mulțimea  $\{3,8; -1,(3); \sqrt{36}; \pi\} \cap \mathbb{Q}$  este:  
a) 1; b) 4; c) 3; d) 2.
3. Cel mai mare număr întreg mai mic decât  $-3\sqrt{3}$  este ...
4. **MP** Un copil a cheltuit 10% din banii lui ceea ce reprezintă 6 lei. Ce sumă a avut la început? a) 100 lei b) 60 lei c) 30 lei d) 200 lei.
5. Soluția reală a ecuației  $1 - 2x = 3$  este: a) 1; b) -1; c) 2; d) -2.
6. Trapezul cu bazele de lungimi 24 cm și 10 cm are linia mijlocie egală cu:  
a) 12 cm; b) 5 cm; c) 17 cm; d) 7 cm.
7. Un dreptunghi  $ABCD$  are  $AB = 3$  cm și  $AC = 5$  cm. Perimetrul dreptunghiului este de:  
a) 16 cm; b) 14 cm; c) 12 cm; d) 18 cm.
8. Valoarea lui  $\sin 30^\circ$  este: a)  $\frac{1}{2}$ ; b)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; c)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; d)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .
9. În  $\triangle ABC$  se știe că  $DE \parallel AC$ ,  $BE = 6$  cm,  $EC = 8$  cm,  $D \in [AB]$ ,  $E \in [BC]$ .  
Atunci valoarea raportului  $\frac{AD}{AB}$  este: a)  $\frac{3}{4}$ ; b)  $\frac{4}{3}$ ; c)  $\frac{4}{7}$ ; d)  $\frac{3}{7}$ .
- II. 10. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale inecuația  $2x - \frac{x+1}{2} \leq 1$ .
11. **MP** 7 kg mere și 3 kg portocale costau 39 lei. După o scumpire cu 20% la mere și 10% la portocale, 3 kg mere și 5 kg portocale costă 43,80 lei. Cât costă 1 kg de mere, respectiv 1 kg de portocale?
12. Fie  $\triangle ABC$  cu  $AB = 8$  cm,  $\sphericalangle B = 60^\circ$ ,  $\sphericalangle C = 45^\circ$  și  $AD \perp BC$ ,  $D \in BC$ . Dacă  $P, R$ , și  $Q$  sunt mijloacele laturilor  $[AB]$ ,  $[AC]$  și, respectiv,  $[BC]$  aflați: a) lungimea înălțimii  $AD$ ; b) perimetrul  $\triangle ABC$ ; c) perimetrul patrulaterului  $PDQR$ .

## Testul 2

- I. 1. Rezultatul calculului  $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} - 0,25$  este: a) 2; b) -2,5; c) 1,25; d) -1,75.
2. Lungimea cercului de diametru 5 cm este: a)  $10\pi$  cm; b)  $5\pi$  cm; c)  $2,5\pi$  cm; d)  $25\pi$  cm.
3. Cel mai mare număr natural, mai mic decât  $2\sqrt{5}$  este ...
4. Probabilitatea ca, alegând un număr din primele 10 numere naturale, acesta să fie prim este de ...
5. Soluția naturală a ecuației  $|1 - 3x| = 5$  este: a) -2; b) 1; c) 2; d) 3.
6. Dacă o linie mijlocie într-un triunghi echilateral are 8 cm atunci perimetrul triunghiului este de: a) 24 cm; b) 12 cm; c) 48 cm; d) 8 cm.
7. Un paralelogram  $ABCD$  cu  $AB = 6$  cm,  $BC = 8$  cm,  $\sphericalangle B = 30^\circ$  are aria ...

8. Un dreptunghi  $ABCD$  cu  $AB=5$  cm și aria de  $60$  cm<sup>2</sup> are diagonala de ...

9. Patrulaterul în care diagonalele se înjumătățesc și sunt congruente este ...

II. 10. Rezolvați: a)  $\frac{x+3}{2} - \frac{x-1}{3} = x - \frac{4-x}{6}$ ; b) 
$$\begin{cases} 2-3(x+y) = 5x-2y \\ 5-\frac{x}{2} = x - \frac{x-y}{2} \end{cases}$$

11. **MP** După ce a mâncat 35% din bomboanele pe care le avea, unui copil i-au rămas cu 6 mai multe decât a mâncat deja. Câte bomboane a avut la început?

12. Fie  $ABCD$  un trapez isoscel  $AB \parallel CD$ ,  $AB=6\sqrt{2}$  cm,  $DC=8\sqrt{2}$  cm și  $AC \perp DB$ .

a)  $AC=?$                       b)  $A_{ABCD}=?$                       c)  $P_{ABCD}=?$                       d)  $d(A;BC)=?$

### Testul 3

I. 1. Rezultatul calculului  $\frac{3}{8}; (-4)^{-1} + \left(-\frac{2}{3} + 1\right)$  este egal cu:

a)  $-\frac{1}{6}$ ;    b)  $\frac{11}{6}$ ;    c)  $-\frac{7}{6}$ ;    d)  $-\frac{19}{6}$ .

2. Fie mulțimea  $A = \left\{-\sqrt{8}; \sqrt{36}; \sqrt{\frac{2}{9}}; -\sqrt{6\frac{1}{4}}; (-3)^2\right\}$ . Mulțimea  $A \cap \mathbb{Z}$  are ... elemente.

3. Aria cercului de rază  $\sqrt{2}$  cm este: a)  $2\sqrt{2}\pi$  cm<sup>2</sup>; b)  $2\pi$  cm<sup>2</sup>; c)  $8\pi$  cm<sup>2</sup>; d)  $4\pi$  cm<sup>2</sup>.

4. Efectuând produsul cartezian  $\{2; 3\} \times \{0; 2\}$  se obține ...

5. **MP** O persoană avea inițial suma de 340 lei. A cheltuit o parte din ea rămânând cu 153 lei. Procentul reprezentând suma cheltuită este: a) 44%; b) 45%; c) 52%; d) 55%.

6. Perimetrul unui pătrat este egal cu 48 cm. Aria pătratului este de ... cm<sup>2</sup>.

7. Dacă un dreptunghi are diagonala de 25 cm și lungimea de 20 cm, perimetrul acestuia este de: a) 70 cm; b) 80 cm; c) 50 cm; d) 300 cm.

8. Dacă  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$  și  $AB=6$  cm,  $AC=8$  cm,  $BC=12$  cm iar perimetrul  $\triangle DEF$  este 78 cm atunci lungimea laturii  $EF$  este egală cu: a) 18 cm; b) 52 cm; c) 24 cm; d) 36 cm.

9. Calculând  $\operatorname{tg} 45^\circ - \sin 30^\circ$  se obține: a) 0; b)  $\frac{1}{2}$ ; c)  $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ ; d)  $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ .

II. 10. Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația  $\frac{x-3}{2} - \frac{3x+1}{4} = \frac{2(x+6)}{3}$ .

11. Fie numerele  $a = \left(\sqrt{27} - \sqrt{5^{-1}} - \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{6}{\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{5}{3}} + 1\right)^{-1}$  și  $b = \sqrt{4^2 + 8^2}$ .

a) Să se determine  $x \in \mathbb{Z}$  știind că  $x < a < x+1$ .

b) Să se calculeze media aritmetică a numerelor  $a$  și  $b$ .

12. Fie  $\triangle ABC$  cu  $\sphericalangle BAC = 90^\circ$  și ( $BM$  bisectoarea  $\sphericalangle ABC$ ,  $M \in [AC]$  iar  $ME \perp BC$ ,  $E \in [BC]$ ). Știind că  $\sphericalangle BMA = 60^\circ$  și  $BM = 12$  cm, să se determine: a) înălțimea  $AD$  a  $\triangle ABC$ ,  $D \in [BC]$ ;

b) raportul ariilor  $\triangle CEM$  și  $\triangle CAB$ ; c) perimetrul  $\triangle ABC$ , rotunjit la cel mai apropiat număr întreg.

I. 1. Rezultatul calculului  $\left(-1\frac{1}{9}\right) : \left(\frac{4}{12} + \frac{1}{3} - \frac{5}{36}\right)$  este: a) 4; b) -4; c) -1; d) 1.

2. Fie mulțimea  $A = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| \leq 4\}$ . Atunci  $A \cap \mathbb{N}$  are ... elemente.

3. Valoarea de adevăr a propoziției „ $-2\sqrt{3} < -3,5$ ” este: a) A; b) F.

4. În  $\triangle ABC$  cu  $\sphericalangle A = 90^\circ$ ,  $AB = 4$  cm și  $BC = 5$  cm,  $\sin(\sphericalangle C)$  este:

a)  $3/4$ ; b)  $5/4$ ; c)  $4/5$ ; d)  $3/5$ .

5. Dacă 420 reprezintă 35% dintr-un număr atunci acesta este egal cu:

a) 1200; b) 174; c) 147; d) 84.

6. Ecuația  $a + 3(x - 2) = x$  admite ca soluție numărul întreg  $-2$ . Valoarea lui  $a$  este ...

7. Dacă aria unui romb este egală cu  $24 \text{ cm}^2$  și o diagonală are lungimea de 8 cm, cealaltă diagonală este egală cu: a) 3 cm; b) 4 cm; c) 6 cm; d) 8 cm.

8. Perimetrul unui triunghi echilateral este egal cu 48 cm. Aria lui este ...  $\text{cm}^2$ .

9. Pe laturile  $[AB]$  și  $[AC]$  ale  $\triangle ABC$  se iau punctele  $M$ , respectiv  $N$  astfel încât  $MN \parallel BC$ ,  $AB = 20$  cm,  $AM = 4$  cm.  $NC = 24$  cm. Lungimea laturii  $AC$  este egală cu:

a) 6 cm; b) 8 cm; c) 16 cm; d) 30 cm.

II. 10. Să se arate că  $x \in \mathbb{Z}$  dacă  $x = \left(2\sqrt{45} - \sqrt{20}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{2}} - \sqrt{1\frac{3}{5}}\right) : \sqrt{200^{-1}}$ .

11. **MP** Un automobilist avea de parcurs 180 km. Dacă mărește viteza cu 20% va ajunge cu o jumătate de oră mai devreme. Cu ce viteză își propusese să meargă inițial?

12. Fie  $\triangle ABC$  dreptunghic cu  $\sphericalangle A = 90^\circ$ ,  $\sphericalangle B = 60^\circ$  și  $AC = 6$  cm. Să se determine: a) aria triunghiului; b) lungimea cercului circumscris triunghiului; c) perimetrul  $\triangle AOC$  rotunjit la cel mai apropiat număr întreg,  $O$  fiind centrul cercului circumscris  $\triangle ABC$ .

# LIBRIS books

## 2. Intervale de numere reale. Inecuații în $\mathbb{R}$

### 2.1. Mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor lor

1. Determinați elementele și cardinalul mulțimilor:

a)  $\{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x \leq 8\}$     b)  $\{x \in \mathbb{N} \mid -5 \leq x \leq 3\}$     c)  $\{x \in \mathbb{N}^* \mid -1 < x \leq 4\}$     d)  $\{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x < 7\}$

2. Enumerați elementele mulțimilor:

a)  $\{x \in \mathbb{N} \mid 3x + 8 \leq 17\}$     b)  $\{x \in \mathbb{Z} \mid 4x - 5 > 13\}$     c)  $\{x \in \mathbb{N} \mid |x| < 5\}$   
d)  $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\}$     e)  $\{x \in \mathbb{N} \mid |2x - 1| < 3\}$     f)  $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x + 1| \leq 4\}$

3. Determinați elementele mulțimilor:

a)  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\}$     b)  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2^a, a \in A\}$     c)  $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = y, y \in A\}$   
d)  $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 = a, a \in A\}$     e)  $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ultima cifră a unui pătrat perfect}\}$

4. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor afirmații:

a) „ $-2 \in \{x \in \mathbb{N} \mid |x + 1| < 3\}$ ”    b) „ $\{-2; 4\} \in \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$ ”  
c) „ $-6 \in \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k - 3, k \in \mathbb{Z}\}$ ”    d) „ $1 \in \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3^k, k \leq 4, k \in \mathbb{N}\}$ ”  
e) „ $196 \in \{x \in \mathbb{N} \mid x = k^2, k \in \mathbb{N}\}$ ”    f) „ $-64 \in \{x \in \mathbb{Z} \mid x = k^3, k \in \mathbb{Z}\}$ ”  
g) „ $4,5 \in \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| > 2\}$ ”    h) „ $\sqrt{3} \in \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 1\}$ ”

5. Scrieți elementele următoarelor mulțimi cu ajutorul proprietăților caracteristice:

a)  $\{0; 2; 4; 6; 8\}$     b)  $\{13; 15; 17; 19; 21\}$     c)  $\{0; 1; 4; 9; 16; 25\}$   
d)  $\{1; 6; 11; 16; 21\}$     e)  $\{1; 2; 4; 8; 16; 32\}$     f)  $\{1; 3; 9; 27; 81; 243\}$   
g)  $\{1; 3; 6; 10; 15; 21; 28\}$

6. Stabiliți dacă următoarele mulțimi sunt finite sau infinite și determinați cardinalul mulțimilor finite:

a)  $\{x \in \mathbb{N} \mid -3 \leq x < 278\}$     b)  $\{x \in \mathbb{N} \mid |x| < 53\}$     c)  $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 75\}$     d)  $\{x \in \mathbb{N} \mid 2^x < 300\}$   
e)  $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 50\}$     f)  $\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq 1\}$     g)  $\{x \text{ este cifră} \mid \overline{2x} : 2\}$

7. Determinați elementele mulțimilor  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 45 : (4x + 1)\}$  și  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 10 : (2x + 1)\}$ . Aflați  $\text{card}(A \cup B)$ .

8. Determinați elementele mulțimilor:

$A = \{a \in \mathbb{Z} \mid 16 : a \text{ și } (a + 1) \mid 15\}$  și  $B = \{a \in \mathbb{Z} \mid a : 5 \text{ și } (a + 2) \mid 21\}$ .

9. Aflați elementele mulțimilor  $A = \{a \in \mathbb{Q} \mid (2a + 1)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}\}$  și  $B = \{a \in \mathbb{Q} \mid (3a\sqrt{3} + \sqrt{27}) \in \mathbb{Q}\}$ .

10. Fie mulțimea  $A = \left\{-4^0; 0; \sqrt{0,25}; (-8)^0; \frac{298}{149}\right\}$ .

Aflați elementele mulțimilor  $B = \left\{x \in A \mid \frac{1}{x} \in A\right\}$ ,  $C = \{x \in A \mid -x \in A\}$  și  $D = \{x \in A \mid |x| \in A\}$ .

11. Să se afle elementele mulțimilor:  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, |x| < 7\}$ ;  $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 3 \leq |x| < 6\}$ ;  
 $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, |x| > 2\}$ ;  $A \cup B$ ;  $A \cap B$ ;  $A \cap C$ ;  $B - C$ ;  $A - C$ .

12. Să se afle elementele mulțimilor:  $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}^*, |x| \leq 3\}$ ;  $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 2 < |x| \leq 5\}$ ;  
 $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| \geq 0\}$ ;  $D = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, -3 \leq |x| \leq 6\}$ ;  $A \cap B$ ;  $D - (A \cup B)$ ;  $B \cap C$ .

13. Aflați elementele mulțimilor:

- a)  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -\sqrt{3} < x \leq \sqrt{8}\}$     b)  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 - \sqrt{2} \leq x < 2\sqrt{3}\}$     c)  $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < -3\sqrt{5} < x + 1\}$   
 d)  $D = \{x \in \mathbb{N} \mid 3\sqrt{3} \leq x^2 \leq 8\sqrt{2}\}$     e)  $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid -\sqrt{2} < x^2 \leq 4\sqrt{5}\}$

14. Determinați elementele mulțimilor și cardinalul lor:

- a)  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2\sqrt{2} \leq |x| < 3\sqrt{3}\}$     b)  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < \sqrt{x} \leq 5\}$   
 c)  $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 3,5 < \sqrt{x+1} < 6,2; \sqrt{x+1} \in \mathbb{N}\}$     d)  $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2 < \sqrt{x^2} < 3\sqrt{2}\}$

15. Determinați valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

- a)  $-2 \in \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 4\}$     b)  $\sqrt{2} \in \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 2\}$     c)  $\sqrt{3} \in \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$   
 d)  $-7 \in \{x \in \mathbb{Z} \mid 7 : x\}$     e)  $91 \in \{x \in \mathbb{Z} \mid x : 7\}$     f)  $1 \in \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0, |x| = 1\}$   
 g)  $0 \in \{x \in \mathbb{R} \mid x(x-1)(x-2) = 0\}$

16. Determinați elementele mulțimilor:

- a)  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \sqrt{x} \in \mathbb{N}, x \leq 50\}$     b)  $B = \{\overline{ab} \mid \overline{aa} : \overline{bb} = 2\}$   
 c)  $C = \{\overline{ab} \mid \overline{ab} : (a+b) = 3 \text{ rest } 3\}$     d)  $D = \{\overline{ab} \mid \overline{ab} = \overline{ba} + 2a\}$

17. Fie mulțimea  $A = \{\overline{abc} \mid a \cdot b \cdot c = 18\}$ . a) Aflați cardinalul mulțimii A. b) Calculați probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea A, acesta să se dividă cu 3.

18. Determinați elementele mulțimilor:

- a)  $\left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{6}{x+1} \in \mathbb{N}\right\}$     b)  $\left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{24}{3x-1} \in \mathbb{N}\right\}$     c)  $\left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{15}{2x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$   
 d)  $\left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{18}{2x-3} \in \mathbb{Z}\right\}$     e)  $\left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{6}{x+5} \in \mathbb{N}\right\}$     f)  $\left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{8}{x-4} \in \mathbb{Z}\right\}$

19. Determinați elementele mulțimilor:

- a)  $\left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{2x+1}{x+5} \in \mathbb{N}\right\}$     b)  $\left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{x+7}{x-1} \in \mathbb{N}\right\}$     c)  $\left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{2x+3}{3x-6} \in \mathbb{N}\right\}$   
 d)  $\left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x}{4x-7} \in \mathbb{Z}\right\}$     e)  $\left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{2x+5}{5x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$     f)  $\left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{6x+1}{5x+2} \in \mathbb{Z}\right\}$

20. Aflați elementele mulțimilor:

- a)  $\left\{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq \frac{3x+1}{2} < 7\right\}$     b)  $\left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{13}{2x+1} \geq 2\right\}$     c)  $\left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x+1}{9} < \frac{2x+1}{6} \leq \frac{x+1}{4}\right\}$

21. Aflați valoarea de adevăr a propoziției „ $2, (45) \in \{x \in \mathbb{Z} \mid 4x < 10\}$ ”.

22. Precizați cardinalul mulțimilor: a)  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2^{15} < x < 2^{17}\}$ ; b)  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 3^7 \leq x \leq 3^{10}\}$ .

## 2.2. Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor

— Noțiuni de bază —

Mulțimea  $\{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$  se numește interval închis și se notează  $[a; b]$ .

Se definesc:

- $\{x \in \mathbb{R} | a < x < b\} = (a; b)$
- $\{x \in \mathbb{R} | x < a\} = (-\infty; a)$
- $\{x \in \mathbb{R} | x > a\} = (a; \infty)$
- $\{x \in \mathbb{R} | x \leq a\} = (-\infty; a]$
- $\{x \in \mathbb{R} | x \geq a\} = [a; \infty)$
- $\{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\} = [a; b]$
- $\{x | x \in \mathbb{R}, |x| \leq a\} = [-a; a]$
- $\{x | x \in \mathbb{R}, |x| < a\} = (-a; a)$

Operațiile cu mulțimi (reuniunea, intersecția, diferența) se pot efectua și cu intervale.

- $\{x | x \in \mathbb{R}, |x| \geq a\} = (-\infty; -a] \cup [a; \infty)$
- $\{x | x \in \mathbb{R}, |x| > a\} = (-\infty; -a) \cup (a; \infty)$

**\***

1. Să se afle valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a)  $-2,5 \in [-3; 0)$       b)  $\frac{4}{5} \in [1; 2]$       c)  $\sqrt{2} \notin (1; 3)$   
 d)  $[-3; 2) \subset [-4; 3]$       e)  $\{-2; 0; 1\} \subset [-2; 2]$       f)  $\{-\sqrt{3}; \sqrt{2}; \sqrt{5}\} \subset \left[-2; 2\frac{1}{5}\right]$

2. Să se afle valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a)  $-\sqrt{2} \in (-1; 2)$       b)  $-3 \in (-3; 7)$       c)  $2\sqrt{5} \in (2; 4,8)$       d)  $4 \in (2\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$   
 e)  $1, (3) \in \left(\frac{4}{3}; \frac{5}{2}\right)$       f)  $\frac{8}{3} \in \left(\frac{5}{2}; \frac{21}{5}\right)$       g)  $-2\frac{1}{3} \in (-2; 3)$       h)  $-5\sqrt{2} \in (-6\sqrt{2}; -7)$

3. Reprezentați pe axa numerelor următoarele intervale:

- a)  $[-3; 0)$       b)  $(-1; 3)$       c)  $(-7; -2)$       d)  $(-2; +\infty)$       e)  $[3; 7)$   
 f)  $(-\infty; 4]$       g)  $(-10; 2]$       h)  $[3; +\infty)$       i)  $(-\infty; -1)$

4. Reprezentați pe axa numerelor următoarele mulțimi și precizați ce este figura geometrică apărută (segment, semidreaptă, punct):

- a)  $[2; 8)$       b)  $\{x \in \mathbb{R} | x - 7 = 0\}$       c)  $\{x \in \mathbb{R} | 2x \leq x\}$       d)  $(5; +\infty)$       e)  $\{x \in \mathbb{R} | 3 < x + 1 < 7\}$

5. Să se scrie sub formă de interval:

- a)  $\{x \in \mathbb{R} | 5 < x < 7\}$       b)  $\{x \in \mathbb{R} | -3 < x \leq 2\}$       c)  $\{x \in \mathbb{R} | -10 \leq x \leq 8\}$   
 d)  $\{x \in \mathbb{R} | 3 \leq x < 100\}$       e)  $\{x \in \mathbb{R} | 0,5 \leq x\}$       f)  $\{x \in \mathbb{R} | x < -\sqrt{3}\}$

6. Determinați numărul numerelor întregi din intervalul:

- a)  $(-3; 1,2)$       b)  $\left(\frac{7}{5}; \frac{11}{2}\right)$       c)  $(-2\sqrt{3}; \sqrt{2})$       d)  $[-4; -\sqrt{3}]$

7. Aflați cel mic și cel mai mare număr întreg din următoarele intervale:

- a)  $[-6; 1,8)$       b)  $(2; 7)$       c)  $\left[2\frac{1}{3}; \frac{19}{2}\right]$       d)  $\left(1, (3); \frac{5}{2}\right)$       e)  $(-3\sqrt{5}; 2\sqrt{2})$

8. Să se determine următoarele mulțimi:

- a)  $\{x \in \mathbb{R} | x > 4\}$       b)  $\{x \in \mathbb{R} | x < -8\}$       c)  $\{x \in \mathbb{R} | 10 \geq x\}$       d)  $\{x \in \mathbb{N} | 4 < x\}$   
 e)  $\{x \in \mathbb{Z} | -2 \leq x\}$       f)  $\{x \in \mathbb{R} | -3 < x\}$       g)  $\{x \in \mathbb{N} | -3 \geq x\}$       h)  $\{x \in \mathbb{R} | -3 < x \leq -1\}$   
 i)  $\{x \in \mathbb{R} | -\sqrt{2} > x\}$       j)  $\{x \in \mathbb{Z} | -\sqrt{3} < x < \sqrt{2}\}$

9. Să se afle valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a)  $|2\sqrt{2}-4|-2(2+\sqrt{2}) \in [-6; -5]$       b)  $\frac{5}{8}+2^{-1}+2^{-2}+2^{-3} \in (\sqrt{2}; \sqrt{5})$   
 c)  $2(-3)^{-1}+(-3)^{-2}+(-3)^{-3} \in (-0, (3); -0, (1))$

10. Determinați mulțimile:

- a)  $\{x \in \mathbb{R} | 3x+4 \leq -2\}$       b)  $\{x \in \mathbb{R} | 1-2x < 3\}$       c)  $\{x \in \mathbb{R} | 3-4x \geq x-1\}$   
 d)  $\left\{x \in \mathbb{R} \left| 1 - \frac{x+1}{2} \leq x \right.\right\}$       e)  $\{x \in \mathbb{R} | 3-2(x-3) < x\}$

11. Scrieți sub formă de interval: a)  $\{x \in \mathbb{R} | -8 \leq x \leq 0\}$ ; b)  $\{x \in \mathbb{R} | |x| \leq 0\}$ ; c)  $\{x \in \mathbb{R} | |x| \geq 0\}$ .

12. Să se determine următoarele mulțimi:

- a)  $\{x \in \mathbb{Z} | |x| < 2\sqrt{3}\}$       b)  $\{x \in \mathbb{N} | -2,5 \leq x < 10\}$       c)  $\{x \in \mathbb{N} | |x| > -2\}$       d)  $\{x \in \mathbb{R} | |x| \geq 2\}$   
 e)  $\{x \in \mathbb{R} | |x| \leq 2\sqrt{2}\}$       f)  $\{x \in \mathbb{N} | |x| < 1 + \sqrt{2}\}$       g)  $\{x \in \mathbb{Z} | |x| \leq 1 - \sqrt{3}\}$

13. Determinați mulțimile:

- a)  $\{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x+1 < 8\}$       b)  $\left\{x \in \mathbb{R} \left| 2 \leq \frac{x+1}{2} \leq 3 \right.\right\}$       c)  $\left\{x \in \mathbb{R} \left| -1 \leq \frac{2x+3}{3} \leq 1 \right.\right\}$   
 d)  $\{x \in \mathbb{R} | |2x+1| \leq 5\}$       e)  $\left\{x \in \mathbb{R} \left| \left| \frac{x-2}{3} \right| \leq 4 \right.\right\}$       f)  $\{x \in \mathbb{R} | |x+1| \geq 2\}$

14. Să se arate că  $\frac{3a+2b}{5} \in (a; b)$ , oricare ar fi  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ .

15. Să se arate că dacă  $a, b \in (0; 1)$  atunci: a)  $ab - a - b + 1 > 0$ ; b)  $b < (3-a)/2$ .

16. Să se arate că dacă  $[a; b] \subset (2; 5)$  atunci: a)  $|a-b| < 3$ ; b)  $ab - 5a - 2b + 10 < 0$ .

### 2.3. Intersecția și reuniunea intervalelor

1. Să se calculeze: a)  $(-2; 5] \cup \{-2; -1; 2; 3; 5\} =$       b)  $(1; 3) \cup (3; 5) \cup \{1; 3; 5\} =$   
 c)  $\left(-\frac{3}{2}; 0\right] \cup (-1; 4] =$       d)  $\left(-\sqrt{3}; \frac{2}{5}\right] \cup \left(-\sqrt{5}; 0, (3)\right] =$       e)  $\left\{-1; 0; \frac{4}{5}\right\} \cup (-2; 0, 8) =$

2. Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât:

- a)  $[a; 3] \cup (2; 5] = [-3; 5]$       b)  $[a; a+1] \cup \left\{1; \frac{7}{4}\right\} = [1; 2]$       c)  $[a; 5] \cup [a; \sqrt{2}] = [-1; 5]$

3. Aflați numerele reale  $x$  și  $y$  dacă: a)  $(x; y] \cup (2; 3) = (1; 3]$ ; b)  $[x; y] \cup (-4; 0) = [-4; 0]$ .

4. Aflați numerele întregi  $x$  și  $y$  dacă: a)  $(x; y] \cup [5; 6) = [5; 7]$ ; b)  $(x; y) \cup \{1; 2; 3\} = [1; 3]$ .

5. Să se calculeze: a)  $[2; 4] \cap [4; 7] =$       b)  $(-1; 4, 5] \cap (-1; 4; 5) =$

- c)  $\left(-\frac{4}{5}; 1\right] \cap [0; 5] =$       d)  $(-3; -\sqrt{2}) \cap [-\sqrt{5}; 4) =$       e)  $(-8; 5) \cap [5; 6] =$

6. Aflați numerele reale  $x$  și  $y$  dacă: a)  $(x; y) \cap [3; 5) = (3; 4)$ ; b)  $(x; y) \cap (3; 8) = (4; 6)$ .

7. Să se determine  $x$  și  $y$  numere întregi știind că:

- a)  $(x; y) \cap \mathbb{Z} = \{-4\}$       b)  $(x; y) \cap \mathbb{Z} = \{1; 2\}$       c)  $(0; y) \cap [x; 3) = [x; y]$

8. Aflați elementele mulțimilor  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < 2x + 1 \leq 7\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 4\}$  și  $A \cap B$ .

9. Să se calculeze:

a)  $[-3; 5] - (2; 8) =$     b)  $[-4; 6] - (-2; 4) =$     c)  $(-3; 0) - [-6; 2] =$     d)  $[4; 5] - (4; 6)$   
e)  $[-\sqrt{2}; 3] - [4; 6] =$     f)  $[\sqrt{2}; 5] - \{\sqrt{2}; 8, (6)\} =$     g)  $\{-3; 5; -\sqrt{3}; 0; \sqrt{2}\} - [-2; 2] =$

10. Să se calculeze:

a)  $\{x \mid x \in \mathbb{R}, |x| \leq 3\} - (0, (1); 4] =$   
b)  $\{x \mid x \in \mathbb{R}, |x| \geq 3\} \cap [-4; 5)$     c)  $\{x \mid x \in \mathbb{R}, |x| < 4\} - \{x \mid x \in \mathbb{R}, |x| \leq 5\} =$   
d)  $\{-2; 0; 2; 3\} \cap \left\{x \mid x \in \mathbb{R}, |x| \leq \frac{3}{2}\right\} =$     e)  $\left\{y \mid y \in \mathbb{R}, -\frac{1}{2} < y \leq 5\right\} \cap \left(4; 6\frac{3}{4}\right] - \left\{4; 5; 6\frac{3}{4}; 7\right\} =$

11. Să se determine  $a, b, c \in \mathbb{R}, c > 0$  astfel încât: a)  $[a; a+1] - \{2; 3\} = (a; a+1)$ ;

b)  $[b-2; b] \cup (b; b+3) = [4; 9]$ ;    c)  $[c; 2+3c] - [1-4c; 3c+2] = \{5\}$ .

12. Determinați numerele reale  $x$  și  $y$  știind că:

a)  $(3; 7) \setminus (x; y) = (3; 4] \cup [6; 7)$     b)  $(3; 5) \setminus (x; y) = (3; 4]$  și  $(x; y) \setminus (3; 5) = [5; 8)$

13. Aflați toate perechile de numere întregi  $x$  și  $y$  care îndeplinesc condiția  $(x; y) - (3; 5) = \emptyset$ .

14. Să se determine mulțimile și să se calculeze:

a)  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 5\}$ ;     $B = \{x \in \mathbb{R}, -2 \leq |x| < 1\}$ ;     $A \cup B$ ;     $B - A$ ;     $B \cap \mathbb{N}$

b)  $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |x| < -2\}$ ;     $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |x| \leq 0\}$ ;     $A \cap B$ ;     $B \cup A$ ;     $B - A$

c)  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, \frac{6}{x} \in \mathbb{N}\}$ ;     $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 < x < 4\}$ ;     $A - B$ ;     $B \cap \mathbb{N}$

d)  $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, \frac{-7}{x+1} \in \mathbb{Z}\}$ ;     $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -3 < x \leq 4\}$ ;     $A \cap B$

e)  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \mid 24, x \text{ par}\}$ ;     $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |x| \leq 7\}$ ;     $A - B$ ;     $A \cap B$

f)  $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -3 \leq x < 4\}$ ;     $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq 3\}$ ;     $A \cup B$ ;     $A \cap B$

g)  $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > -3\}$ ;     $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x+1 \leq 2\}$ ;     $A \cup B$ ;     $A \cap B$ ;     $A - B$

h)  $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -4 \leq x+1 < 7\}$ ;     $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x-2 > 0\}$ ;     $A \cup B$ ;     $A \cap B$

i)  $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |x| \leq 3\}$ ;     $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| > 1\}$ ;     $A \cap B$ ;     $B - A$

j)  $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |x+1| \leq 4\}$ ;     $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -8 \leq x-3 \leq 2\}$ ;     $A \cap B$ ;     $A \cup B$

k)  $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x+1| > 3\}$ ;     $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -3 \leq 2x+1 \leq 7\}$ ;     $A \cap B$ ;     $A \cup B$

l)  $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -4 < \frac{x+1}{3} < 1\}$ ;     $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |2x+1| \leq 5\}$ ;     $A \cap B$ ;     $A \cup B$

m)  $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -3 \leq \frac{2x+3}{5} < 1\}$ ;     $B = \left\{x \mid x \in \mathbb{R}, \left| \frac{x-2}{3} \right| < 3\right\}$ ;     $A \cap B$ ;     $A \cup B$

15. Aflați valorile reale ale lui  $x$  dacă:

a)  $(-10; 3-x) \cap (3x+1; 4) = \emptyset$     b)  $\text{card}((-\infty; x+1] \cap [2-x; +\infty)) = 1$

c)  $(-\infty; 7-3x) \cap (2x+2; 7) = (2x+2; 7-3x)$

16. Să se arate că dacă  $(a; b) \cup (2; 4] = (a; b)$  atunci  $\frac{2+a-b}{4-b} \geq 1$ .

17. Pentru  $a \in \mathbb{R}^*$ , efectuați:  $(a; -a) \cap [-a^2; a^2]$ .